DURÉE DE VIE DES BIENS DURABLES : MODÈLES ET TESTS

par

Albert BEMMAOR (*)

RÉSUMÉ. — La diffusion des biens durables est désormais entrée dans une phase où le marché du renouvellement revêt une importance de premier ordre. L'étude du processus qui conduit les ménages à changer d'équipement est donc primordiale. Cet article s'insère dans une tradition de recherche où les probabilités de renouvellement sont fondées sur l'observation des durées de vie physique des appareils. L'avantage de cette approche — par rapport à une autre tradition reposant sur les caractéristiques des appareils et des utilisateurs eux-mêmes — est d'une part, sa simplicité analytique et d'autre part, sa flexibilité. Plusieurs modèles sont présentés (loi de Weibull, loi de Weibull pondérée par une loi gamma, loi d'Erlang-2 pondérée par une loi gamma) et leurs caractéristiques sont analysées. Ces modèles permettent d'estimer : (*a*) la durée de vie médiane, la durée de vie moyenne ainsi que la durée de vie probable d'un appareil neuf, (*b*) la durée de vie résiduelle médiane et la durée de vie résiduelle moyenne pour un appareil d'occasion et (*c*) la probabilité de renouveler un appareil d'occasion (d'un âge donné) au bout d'un horizon temporel fixé. Les modèles sont testés sur la distribution des âges de quatre biens durables (réfrigérateur, cuisinière, lave-linge et téléviseur noir et blanc) au moment de l'abandon. Les données ont été collectées en mai-juin 1979 par l'INSEE dans le cadre d'une enquête sur les équipements ménagers auprès d'un échantillon d'environ 20000 ménages. Les résultats montrent que la loi de Weibull pondérée fournit le meilleur ajustement. Elle a cependant tendance à surestimer la proportion d'appareils anciens, ce qui semble dû, en partie, à une variance théorique trop élevée. Comme pour les biens de consommation courante, les résultats montrent que les chances d'abandon d'un bien par les ménages augmentent avec l'âge du bien. La probabilité de renouvellement au bout d'une année s'accroît sensiblement pendant les dix premières années de la vie du bien puis diminue après un tassement pouvant s'étaler sur plusieurs années (cas du refrigérateur et de la cuisinière). La conclusion indique de nouvelles voies de recherche.

ABSTRACT. — LIFE DURATION FOR CONSUMER DURABLES: MODELS AND TESTS. *The diffusion of consumer durables has entered a stage in which renewal sales represent the bulk of consumer sales. Hence, the study of the process which leads households to change equipment is of great importance. This article fits into a research tradition along which renewal probabilities are based upon the empirical frequencies of life duration for appliances. The advantages of this approach — over the other one which rests upon the identification of the characteristics of the appliances and of those of the users — are its parsimony as well as its flexibility. Several models are presented (Weibull distribution, a gamma mixing of Weibulls and a gamma mixing of Erlangs) and their properties are analyzed. These models allow us to estimate: (a) the expected life duration, the median life duration and the likely life duration of an appliance (at "birth"), (b) the mean residual life duration and the median residual life duration, and (c) the probability of renewing an appliance*

(*) Professeur Associé, École Supérieure des Sciences Économiques et Commerciales, 95021 Cergy-Pontoise Cedex. L'auteur remercie l'INSEE de lui avoir fourni des informations complémentaires ainsi que Daniel Verger et un lecteur anonyme pour leurs suggestions. Il demeure néanmoins responsable de toute erreur.

(of a given age) over a fixed time horizon. The models are estimated and tested over the age distribution of appliances belonging to four product classes (refrigerator, cooker, clothes washer, black and white television) at time of disposal. The data have been collected in May and June of 1979 by INSEE from a random sample of about 20,000 households. The results show that the gamma-Weibull model gives the best fit. However, the model tends to overestimate the proportion of old appliances which gives evidence of the "variance discrepancy" problem. Similar to consumer goods, the results show that the likelihood of disposal increases with the age of the good. The probability of renewing an appliance (of a given age) within one year increases sharply over the first ten years of the life of the appliance, levels off and finally decreases. The conclusion indicates some areas for further research.

SOMMAIRE

Introduction 52

1. Les modèles 53

1.1. Le modèle de Weibull 53
1.2. Le modèle Weibull Λ gamma 55
1.3. Le modèle Erlang-2 Λ gamma 57

2. Données, estimation et tests 59

2.1. Données 59
2.2. Estimation 60
2.3. Tests 61

Conclusion 63

Bibliographie 64

Annexes 64

La diffusion des biens durables est désormais entrée dans une phase où le marché du renouvellement revêt une importance de premier ordre. L'étude du processus qui conduit les ménages à changer d'équipement est donc primordiale pour le constructeur de biens ménagers. Elle est cependant rendue délicate par le manque de recul temporel et le peu de données collectées (qui concernent uniquement les gros appareils ménagers).

Deux approches très différentes s'offrent au chercheur : 1) soit d'essayer d'analyser en profondeur les raisons de l'abandon (en regroupant les observations selon les caractéristiques des biens ou selon les caractéristiques socio-démographiques des ménages possesseurs), 2) soit d'essayer d'ajuster aux durées de vie observées (celles des premières générations) des lois statistiques suffisamment simples pour être aisément manipulables, suffisamment complexes pour s'adapter aux données. La première tradition, actuellement en cours de développement, est destinée à développer des estimations des durées de vie espérées des appareils à partir d'un certain nombre de caractéristiques de ces appareils et des ménages possesseurs. Conformément aux études précédentes sur la segmentation de marché, ces travaux devraient permettre de développer des critères de segmentation (Frank, Massy et Wind, 1972).

Cette étude appartient à la deuxième tradition. On considère le cas d'application des biens d'équipement ménager. Plusieurs modèles représentant la distribution des durées de vie entre les appareils sont analysés et comparés. Ces modèles permettent de fournir une réponse à des questions telles que : quelle est la durée de vie espérée d'un appareil neuf? d'un appareil (d'occasion) d'un âge donné? On essaie donc de prédire la durée de vie résiduelle d'un appareil (jusqu'à la mise au rebut). On obtiendra aussi des estimations de la durée de vie médiane, de la durée de vie espérée et de la durée de vie probable d'un appareil neuf. Au fur et à mesure que les appareils avancent en âge, on développe des estimations de la durée de vie résiduelle moyenne et de la durée de vie résiduelle médiane. Finalement, on estime la probabilité de renouveler un appareil d'un âge donné au bout d'un horizon temporel fixé. Les résultats analytiques correspondants sont présentés dans la première partie. Dans la deuxième partie, ces modèles sont ajustés à la distribution des âges de quatre biens durables (réfrigérateur, cuisinière, lave-linge et téléviseur noir et blanc) au moment de l'abandon ([1]), et leurs prédictions sont comparées. La troisième partie est la conclusion.

1. LES MODÈLES

Une pléthore de facteurs expliquent probablement la durée de vie d'un appareil. Pour simplifier, on considère que cette durée est un phénomène essentiellement aléatoire qui peut être représenté par une loi de probabilité. La durée de vie observée d'un appareil (jusqu'à la mise au rebut) correspond à un tirage dans cette loi.

Cette loi permet de prédire la durée de vie d'un appareil à chaque instant de sa vie, à partir de la « naissance ». Elle devrait revêtir trois caractéristiques : 1) la flexibilité, de façon à épouser des formes diverses, 2) la simplicité par le nombre de paramètres qu'elle comprend, et 3) la facilité de manipulation analytique, de façon à conduire à des résultats simples.

1.1. Le modèle de Weibull

Une distribution qui revêt les caractéristiques énoncées est la loi de Weibull dont la densité de probabilité est :

$$f(t \mid \lambda) = \lambda \beta t^{\beta-1} e^{-\lambda t^{\beta}}, \qquad t>0, \quad \lambda,\ \beta>0, \tag{1}$$

([1]) La durée de vie d'un appareil est mesurée par l'âge du bien au moment de l'abandon par les ménages. Comme la proportion d'appareils mis au rebut parmi les appareils abandonnés est de 50,2 % pour les réfrigérateurs, 56,8 % pour les cuisinières, 70,6 % pour les lave-linge et 51,6 % pour les téléviseurs noir et blanc, cette mesure sous-estime la durée de vie réelle des appareils.

où λ est le paramètre d'échelle et β le paramètre de forme (Johnson et Kotz, 1970, pages 250-271). Lorsque $\beta=1$, on obtient la loi exponentielle. La moyenne et la variance sont :

$$E(t\,|\,\lambda)=\beta^{-1}\,\Gamma(\beta^{-1})\,\lambda^{-1/\beta}$$

et :

$$V(t\,|\,\lambda)=(2\,\beta^{-1}\,\Gamma(2\,\beta^{-1})-\beta^{-2}\,\Gamma^{2}(\beta^{-1}))\,\lambda^{-2/\beta}.$$

Le symbole $\Gamma(\,.\,)$ représente la fonction gamma. La distribution cumulée est :

$$H(t\,|\,\lambda)=1-e^{-\lambda t^{\beta}}. \tag{2}$$

Les chances d'abandon par les ménages évoluent avec l'âge de l'appareil.

Pour chaque âge t, elles sont données par :

$$z(t\,|\,\lambda)=\frac{f(t\,|\,\lambda)}{1-H(t\,|\,\lambda)}=\lambda\beta\,t^{\beta-1}. \tag{3}$$

Le paramètre β détermine la forme de cette relation. Lorsque $\beta<1$, les chances d'abandonner l'appareil diminuent avec l'âge t du bien. Lorsque $\beta=2$, la relation est linéaire croissante. Dans tous les cas, la relation est monotone. La forme de cette relation revêt un intérêt pratique pour les fabricants. En effet, si la fonction est croissante, ils orienteront leurs messages publicitaires vers les possesseurs d'appareils afin de les attirer vers leur marque. Par contre, si la fonction est décroissante, ils essaieront surtout de gagner de nouveaux acheteurs ou d'inciter les possesseurs à accroître leur nombre d'appareils.

Trois autres caractéristiques de la loi de Weibull sont les suivantes :

1° la durée de vie résiduelle moyenne d'un appareil d'âge t : elle est donnée par la relation :

$$E(S\,|\,t,\,\lambda)=\frac{1}{1-H(t\,|\,\lambda)}\int_0^{\infty}(1-H(u\,|\,\lambda))\,du=\beta^{-1}\,\Gamma(\beta^{-1})\,\lambda^{-1/\beta}\,e^{\lambda t^{\beta}}. \tag{4}$$

Lorsque $t=0$, on obtient l'espérance de vie à l'état neuf (la moyenne) $E(S\,|\,t=0,\,\lambda)=\beta^{-1}\,\Gamma(\beta^{-1})\,\lambda^{-1/\beta}$. La relation (4) permet d'estimer la durée de vie moyenne restant à courir pour un appareil d'un âge donné.

Pour la loi de Weibull, elle est monotone croissante. Dans la mesure où les âges au-delà d'une certaine limite sont regroupés en une seule catégorie, il n'est pas commode d'estimer empiriquement une moyenne. D'autre part, le calcul de la moyenne sur l'ensemble des appareils abandonnés sous-estime la durée de vie réelle dans la population, d'où l'utilisation de la médiane.

2° La durée de vie résiduelle médiane d'un appareil d'âge t : c'est la durée minimum restant à « vivre » avec une probabilité d'1/2, pour un appareil d'un âge donné. Elle est telle que :

$$(5) \qquad M(S \mid t, \lambda) = Q^{-1}\left[\frac{1}{2} Q(t)\right] - t,$$

où $Q(t) \equiv 1 - H(t)$ et $Q^{-1}(y)$ est la fonction réciproque de $Q(y)$.

Comme $Q(t) = e^{-\lambda t^{\beta}}$, il en résulte que $Q^{-1}(y) = [-(1/\lambda) \ln y]^{1/\beta}$ et :

$$(6) \qquad M(S \mid t, \lambda) = \lambda^{-1/\beta} (\lambda t^{\beta} + \ln 2)^{1/\beta} - t.$$

Lorsque $t = 0$, on obtient la médiane $M(S \mid t = 0, \lambda) = (\ln 2/\lambda)^{1/\beta}$. La durée résiduelle médiane de la loi de Weibull est monotone croissante ($\beta < 1$), ou décroissante ($\beta > 1$). L'équation (6) fournit une autre estimation de la durée de vie restant à courir.

3° La probabilité de renouvellement d'un bien d'un âge donné t au bout d'un horizon temporel de x unités. Cette probabilité est telle que [1] :

$$(7) \qquad H(x \mid t) = \frac{H(t+x) - H(t)}{1 - H(t)} = 1 - [e^{-\lambda (t+x)^{\beta}} / e^{-\lambda t^{\beta}}].$$

Cette probabilité, obtenue à partir de l'observation empirique, peut être recoupée avec les estimations subjectives des probabilités d'achat. On peut la valider en la comparant avec les proportions d'appareils d'âge t effectivement renouvelés au bout d'un horizon de x unités.

Le modèle de Weibull comprend deux paramètres λ et β que l'on suppose fixes dans la population. On considère que l'espérance de vie est constante d'un appareil à l'autre. Cette hypothèse semble peu réaliste. Ainsi, les caractéristiques intrinsèques des appareils diffèrent probablement, tout comme celles liées aux utilisateurs eux-mêmes. Cette hypothèse d'homogénéité est, en partie, relâchée dans les modèles suivants.

1.2. Le modèle Weibull Λ gamma

Comme précédemment, on fait l'hypothèse que la durée de vie d'un appareil donné suit une loi de Weibull. Le paramètre λ de cette loi varie entre les appareils suivant une loi gamma dont la densité de probabilité est :

$$(8) \qquad g(\lambda) = \frac{1}{\Gamma(r)\, \sigma^{r}} \lambda^{r-1} e^{-(1/\sigma)\lambda}, \qquad \lambda > 0, \quad r, \sigma > 0.$$

[1] On considère qu'un appareil est immédiatement renouvelé après qu'il a été abandonné. En fait, les résultats montrent que la proportion d'appareils renouvelés est de 90,4 % pour les réfrigérateurs simples (remplacés par un autre réfrigérateur simple ou par un réfrigérateur-congélateur), 87,5 % pour les cuisinières, 94,2 % pour les lave-linge et 90,2 % pour les téléviseurs noir et blanc (remplacés par un autre téléviseur noir et blanc ou par un téléviseur couleur).

Le paramètre de forme est r et le paramètre d'échelle est σ. La moyenne et la variance de cette loi sont $r\sigma$ et $r\sigma^2$ respectivement. Les raisons pour lesquelles cette loi a été choisie sont les suivantes : (*a*) flexibilité, et (*b*) combinée avec une loi de Weibull, elle conduit à des résultats fermés. L'hétérogénéité entre les appareils est mesurée par le coefficient de variation de la loi gamma :

$$CV = \frac{\text{Écart-type}}{\text{Moyenne}} = r^{-1/2}.$$

Cet indice, fort simple, permet de mesurer l'hétérogénéité des appareils en termes de durée de vie moyenne. Plus cet indice est proche de 0, plus les appareils sont homogènes. La densité de probabilité des durées de vie sur l'ensemble des appareils est :

$$h(t) = \int_0^\infty f(t \mid \lambda)\, g(\lambda)\, d\lambda = r\sigma\beta t^{\beta-1}(1+\sigma t^\beta)^{-(r+1)}. \tag{9}$$

Les propriétés de la loi Weibull Λ gamma ont été étudiées par Dubey (1968). (Le signe Λ représente la pondération de la loi de Weibull par la loi gamma). Cette loi a été utilisée pour représenter la durée de phénomènes aussi divers que les emplois, les grèves ou les guerres (Morrison et Schmittlein, 1980). Dans chacun des cas, elle a conduit à une approximation satisfaisante. La moyenne et la variance de cette loi sont :

$$E(t) = \frac{1}{\beta}\sigma^{-(1/\beta)} B\left(\frac{1}{\beta}, r - \frac{1}{\beta}\right), \qquad r > \frac{1}{\beta}, \tag{A.1}$$

$$V(t) = \frac{1}{\beta}\sigma^{-(2/\beta)}\left[2B\left(\frac{2}{\beta}, r-\frac{2}{\beta}\right) - \frac{1}{\beta}B^2\left(\frac{1}{\beta}, r-\frac{1}{\beta}\right)\right], \qquad r > \frac{2}{\beta}, \tag{A.2}$$

où $B(a, b) = \Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$. La distribution cumulée et les chances d'abandon à un âge donné t sont respectivement :

$$H(t) = 1 - (1+\sigma t^\beta)^{-r}, \tag{10}$$

$$z(t) = r\sigma\beta t^{\beta-1}(1+\sigma t^\beta)^{-1}. \tag{11}$$

Les chances d'abandon sont maximales lorsque :

$$t^* = [\sigma^{-1}(\beta-1)]^{1/\beta}, \qquad \beta > 1. \tag{12}$$

t^* est donc une estimation de la durée de vie probable d'un appareil neuf. Alors que les chances d'abandon au niveau individuel $z(t \mid \lambda)$ augmentent d'une façon monotone ($\beta > 1$), la fonction $z(t)$ au niveau global est non monotone concave. Une simple analyse globale pourrait laisser croire à l'existence d'un apprentissage à l'entretien des appareils (dans la mesure où les chances d'abandon diminuent au-delà de t^*). En fait, ce phénomène peut s'expliquer par la variation des espérances de vie entre appareils. Pour la loi

Weibull Λ gamma, la durée de vie résiduelle moyenne et la durée de vie résiduelle médiane d'un appareil d'âge t sont respectivement :

$$E(S \mid t) = \frac{1}{\beta} \sigma^{-1/\beta} B_{(1+\sigma t^{\beta})^{-1}} \left(\frac{1}{\beta}, r - \frac{1}{\beta} \right) (1 + \sigma t^{\beta})^{r}, \tag{13}$$

et :

$$M(S \mid t) = \sigma^{-1/\beta} [2^{1/r} (1 + \sigma t^{\beta}) - 1]^{1/\beta} - t, \tag{14}$$

avec $B_x(a, b) = \int_0^x u^{a-1} (1-u)^{b-1}$ du (fonction beta incomplète).

La durée de vie résiduelle moyenne $E(S \mid t)$ est convexe au niveau global et atteint son minimum lorsque :

$$\begin{aligned} (15) \quad & \sigma^{1-1/\beta} t^{\beta-1} (1+\sigma t^{\beta})^{r-1} \\ & \times \{ r B_{(1+\sigma t^{\beta})^{-1}} (1/\beta, r - 1/\beta) - (1+\sigma t^{\beta})^{-1/\beta} [1 - (1+\sigma t^{\beta})^{-1}]^{r-1-(1/\beta)} \} = 0. \end{aligned}$$

$M(S \mid t)$ est minimum lorsque :

$$\frac{1-\beta}{\beta} \{ -\ln \sigma + \ln [2^{1/r} (1+\sigma t^{\beta}) - 1] \} + (\beta - 1) \ln t + \frac{1}{r} \ln 2 = 0. \tag{16}$$

On peut calculer t par itération. Les valeurs obtenues fournissent de nouvelles estimations de la durée de vie probable des appareils.

Alors que la durée résiduelle médiane au niveau individuel est décroissante ($\beta > 1$), la durée résiduelle médiane au niveau global (14) est convexe ([1]). Les quatre estimateurs de la durée de vie probable se caractérisent de la façon suivante : 1) l'un est l'âge médian des appareils à l'abandon, 2) un autre, t^*, est l'âge où la probabilité de renouvellement d'un appareil quelconque est la plus forte, 3) t^{**} est l'âge où la durée de vie résiduelle médiane est la plus faible [minimum de (16)] et 4) t^{***} est l'âge où la durée de vie résiduelle moyenne est la plus faible [minimum de (15)].

La probabilité de renouveler au bout de x années un appareil d'âge fixé t est telle que :

$$H(x \mid t) = 1 - \{ (1+\sigma t^{\beta}) / [1 + \sigma (t+x)^{\beta}] \}^{r}. \tag{17}$$

1.3. Le modèle Erlang-2 Λ gamma

Ce modèle a été utilisé pour prédire le renouvellement des biens de consommation courante. On suppose que la durée de vie d'un appareil donné suit une loi d'Erlang dont le paramètre de forme p est fixe entre appareils. Pour la loi d'Erlang, le coefficient de variation est $1/\sqrt{p}$. En estimant ce coefficient sur les durées inter-achats, on a remarqué que la valeur 2 de ce paramètre

---

([1]) Lorsque $\beta < 1$, la durée résiduelle médiane au niveau global est monotone croissante comme au niveau individuel.

fournit une bonne approximation pour la plupart des consommateurs, et ce, dans plusieurs marchés (Herniter, 1971; Chatfield et Goodhardt, 1973; Jeuland, Bass et Wright, 1980). La densité de probabilité de la loi d'Erlang-2 est :

$$f(t \mid \lambda)=\lambda^2 te^{-\lambda t}, \qquad \lambda>0. \tag{18}$$

La moyenne et la variance sont $E(t \mid \lambda)=2/\lambda$ et $V(t \mid \lambda)=2/\lambda^2$. La distribution cumulée et les chances d'abandon sont, respectivement :

$$H(t \mid \lambda)=1-e^{-\lambda t}-\lambda te^{-\lambda t}, \tag{19}$$

$$z(t \mid \lambda)=\lambda^2 t/(1+\lambda t). \tag{20}$$

Les chances d'abandon $z(t \mid \lambda)$ sont monotones croissantes. D'autre part, la durée de vie résiduelle moyenne est donnée par :

$$E(S \mid t, \lambda)=\frac{2}{\lambda}\,\frac{e^{\lambda t}}{1+\lambda t}. \tag{21}$$

Cette fonction est monotone croissante. La durée de vie résiduelle médiane est telle que :

$$M(S \mid t, \lambda)=y-t, \tag{22}$$

où y est la racine de l'équation :

$$e^{-\lambda y}(1+\lambda y)-\frac{1}{2}e^{-\lambda t}(1+\lambda t)=0.$$

On peut calculer y par itération. Comme on le montre dans le tableau 1 pour des valeurs fixées de λ, $M(S \mid t, \lambda)$ est une fonction décroissante.

On considère que le paramètre λ varie d'un appareil à l'autre suivant une loi gamma dont les paramètres sont r et σ. Il en résulte que la densité de probabilité des durées de vie au niveau global est :

$$h(t)=(r)_2\,\sigma^2 t(1+\sigma t)^{-(r+2)}, \qquad t>0, \quad r, \sigma>0, \tag{23}$$

où $(r)_2=\Gamma(r+2)/\Gamma(r)$ est le symbole de Pochhammer. La moyenne et la variance de la loi Erlang-2 Λ gamma sont :

$$E(t)=2\sigma^{-1}(r-1)^{-1}, \qquad r>1, \tag{A.3}$$

$$V(t)=\sigma^{-2}(r-1)^{-1}[6(r-2)^{-1}-4(r-1)^{-1}], \qquad r>2. \tag{A.4}$$

La distribution cumulée et les chances d'abandon sont données par les relations :

$$H(t)=1-(1+\sigma t)^{-r}-r\sigma t(1+\sigma t)^{-(r+1)}, \tag{24}$$

$$z(t)=r(r+1)\sigma^2 t/\{(1+\sigma t)[1+(r+1)\sigma t]\}. \tag{25}$$

$z(t)$ est maximum lorsque :

$$t^* = \frac{1}{\sigma}(r+1)^{-1/2}. \tag{26}$$

La durée de vie résiduelle moyenne pour un appareil d'un âge donné t est :

$$E(S \mid t) = \frac{2}{(r-1)\sigma}(1+\sigma t)^r [1 + r\sigma t(1+\sigma t)^{-1}]^{-1}, \qquad r>1. \tag{27}$$

Comme $E(S \mid t, \lambda)$ au niveau individuel, cette fonction est aussi monotone croissante. La durée de vie résiduelle médiane est telle que :

$$M(S \mid t) = y - t, \tag{28}$$

où y est la racine de l'équation :

$$(1+\sigma y)^{-r} + r\sigma y(1+\sigma y)^{-(r+1)} - \frac{1}{2}[(1+\sigma t)^{-r} + r\sigma t(1+\sigma t)^{-(r+1)}] = 0.$$

Cette équation peut être résolue par itération. Comme $M(S \mid t, \lambda)$, la durée résiduelle médiane au niveau global est monotone décroissante. La probabilité de renouveler un appareil d'âge t au bout d'une période égale à x unités est :

$$H(x \mid t) = 1 - \frac{[1+\sigma(t+x)]^{-r} + r\sigma(t+x)[1+\sigma(t+x)]^{-(r+1)}}{(1+\sigma t)^{-r} + r\sigma t(1+\sigma t)^{-(r+1)}}. \tag{29}$$

2. DONNÉES, ESTIMATION ET TESTS

2.1. Données

En mai-juin 1979, l'INSEE a réalisé une enquête sur l'équipement des ménages et les améliorations du logement auprès d'environ 20 000 ménages (Verger, 1982 *a*). A propos de l'équipement, les questions suivantes sur les abandons d'appareils étaient posées :

1) Depuis le 1er janvier 1977, avez-vous vendu (y compris les reprises par un vendeur), donné, mis au rebut l'un des appareils suivants :

- Automobile ☐
- Réfrigérateur simple et réfrigérateur conservateur ☐
- Réfrigérateur congélateur ☐
- Congélateur ☐
- Machine à laver le linge (non portable) ☐
- Machine à laver la vaisselle (non portable) ☐
- Téléviseur noir et blanc ☐

Téléviseur couleur ☐
Cuisinière (électrique ou à gaz) ☐
Aucun de ces appareils (sauter les questions suivantes) ☐

2) Quel âge approximatif avait l'appareil au moment de l'abandon? —

3) Au moment de l'abandon l'appareil était-il

En panne ou sinistré ? ☐
En état de marche défectueuse ? ☐
En état de marche acceptable ? ☐
Ne sait pas ☐

Le tableau 2 montre la distribution des réponses à la question 3) pour les biens ménagers. On constate qu'en moyenne, un appareil sur trois est abandonné en état de marche acceptable. Pour le réfrigérateur [1] et la cuisinière, ce taux atteint 46 % alors que pour le lave-linge, il est de 14 %. La distribution redressée des âges des appareils au moment de l'abandon (quel que soit leur état) est présentée dans le tableau 5 (Verger, 1982 *b*). On remarque une tendance des répondants à arrondir l'âge des biens à un multiple de cinq.

2.2. Estimation

Les paramètres ont été estimés par la méthode des moindres carrés non linéaires. Pour le modèle de Weibull, la fonction à minimiser est la suivante :

$$\operatorname*{Min}_{\lambda,\,\beta} E = \sum_{i=1}^{26} [\ln \lambda + \beta \ln (i-0{,}5) - \ln O\,(i-0{,}5)]^2,$$

où λ et β sont les paramètres de la loi et $O(.)$ est la distribution cumulée observée. Pour la loi Weibull Λ gamma et la loi Erlang-2 Λ gamma, la fonction est la suivante :

$$\operatorname{Min} E = \sum_{i=1}^{26} [H\,(i-0{,}5) - O\,(i-0{,}5)]^2,$$

où $H(.)$ est la distribution cumulée théorique. On peut rechercher les solutions par itération. Les paramètres estimés sur les données redressées ainsi que sur les données brutes sont présentés dans le tableau 4. On remarque que les valeurs estimées des paramètres sont relativement proches pour chacun des quatre biens. (A noter cependant des variations plus sensibles des paramètres r et σ du modèle Weibull Λ gamma, ce qui peut s'expliquer par un nombre plus élevé de paramètres que celui des autres modèles). Le paramètre β de la loi de Weibull et de la loi Weibull Λ gamma est supérieur à 1, ce qui montre que les chances d'abandon au niveau individuel sont monotones

[1] Par « réfrigérateur », on entend « réfrigérateur simple et réfrigérateur-conservateur ».

croissantes. Il ne semble donc pas exister d'inertie au renouvellement dû à un effet d'apprentissage ou à une tendance fondamentale du comportement des ménages. Pour la loi de Weibull homogène, la relation est proche de la linéarité (β voisin de 2). D'autre part, l'indice d'hétérogénéité prédit par le modèle Weibull Λ gamma ($=r^{-1/2}$) montre que les cuisinières et les réfrigérateurs sont plus homogènes en termes de durée de vie moyenne que le lave-linge et le téléviseur noir et blanc (tableau 3). Par contre, l'indice d'hétérogénéité mesuré à partir du modèle Erlang-2 Λ gamma selon lequel les quatre marchés sont similaires paraît moins fiable.

2.3. Tests

Une fois les pramètres estimés, les équations (2), (10) et (19) ont été ajustées à la distribution redressée des âges des biens à l'abandon. Les résultats sont présentés dans le tableau 5. Dans chacun des cas, le modèle Weibull Λ gamma conduit au meilleur ajustement. On remarquera cependant qu'il surestime sensiblement (tout comme le modèle Weibull homogène et le modèle Erlang-2 Λ gamma) la proportion d'appareils âgés de plus de 25 ans dans le cas du réfrigérateur et de la cuisinière. Ce problème, parfois appelé « écart dû à la variance », provient de deux sources d'erreur. La variance globale peut être décomposée de la façon suivante :

$$V(t)=E_\lambda[V(t\mid\lambda)]+V_\lambda[E(t\mid\lambda)],$$

où $E_\lambda[V(t\mid\lambda)]$ est la moyenne des variations intra-appareils et $V_\lambda[E(t\mid\lambda)]$ est la variation inter-appareils des espérances de vie.

Le modèle individuel étant la loi de Weibull, on démontre ([1]) que le coefficient de dispersion $(V(t\mid\lambda)/E(t\mid\lambda))$ est égal à :

$$[(2\pi)^{-1/2}\,2^{2/\beta+1/2}\,\Gamma(1/\beta+1/2)-(1/\beta)\,\Gamma(1/\beta)]\,\lambda^{-1/\beta}.$$

C'est une fonction hyperbolique décroissante qui, pour chaque bien, est égale à :

Réfrigérateur	$0{,}140\ \lambda^{-0{,}368}$
Cuisinière	$0{,}116\ \lambda^{-0{,}330}$
Lave-linge	$0{,}0616\,\lambda^{-0{,}230}$
Téléviseur noir et blanc	$0{,}0927\,\lambda^{-0{,}290}$

Comme la médiane et le troisième quartile du paramètre λ sont peu élevés, on en déduit que le coefficient de dispersion théorique est élevé pour la plupart des appareils, ce qui est probablement peu réaliste. L'autre source d'erreur est liée à la variation des espérances de vie inter-appareils. On démontre (Annexe B) que le coefficient de dispersion de la variable $E(t\mid\lambda)$ est égal à :

$$(1/\beta)\,\sigma^{-1/\beta}[B(1/\beta,\ r-2/\beta)-B(1/\beta,\ r-1/\beta)].$$

([1]) On utilise pour cela la relation $\Gamma(2z)=(2\pi)^{-1/2}\,2^{2z-1/2}\,\Gamma(z)\,\Gamma(z+1/2)$ (ABRAMOWITZ et STEGUN, 1972, p. 256).

	Médiane (10^{-4})	Troisième quartile (10^{-4})
Réfrigérateur	3,885	6,987
Cuisinière	2,936	4,747
Lave-linge	0,169 3	0,496 8
Téléviseur noir et blanc	1,622 0	3,834 0

Pour chaque bien, le coefficient de dispersion est égal à :

Réfrigérateur	5,054
Cuisinière	1,378
Lave-linge	52,024
Télévision noir et blanc	17,720

Bien que ce coefficient soit relativement peu élevé pour le réfrigérateur et la cuisinière, il est probable que, combiné avec un fort coefficient de dispersion individuel, il conduise à une surestimation de la variance des durées de vie globales. Le téléviseur noir et blanc et surtout le lave-linge semblent, par comparaison, être des biens dont l'espérance de vie est bien plus variable.

La valeur estimée de la durée de vie probable [équation (12)] d'un réfrigérateur et d'une cuisinière prédite par la loi Weibull Λ gamma est d'environ 22 ans alors que pour le lave-linge et le téléviseur noir et blanc, cette durée s'élève à 12 ans (tableau 3). La valeur estimée de t^{**} (qui minimise la durée de vie résiduelle médiane) est voisine de t^{*} pour les quatre biens, avec une légère sous-estimation pour t^{**} dans chaque cas. On remarque cependant que les deux valeurs t^{*} et t^{**} diffèrent sensiblement de la médiane (en particulier pour le réfrigérateur et la cuisinière). Ainsi, pour les réfrigérateurs, la médiane (théorique) est d'environ 15 ans, soit 4 à 7 années de moins que les estimations précédentes. Pour la cuisinière, la différence est encore plus nette, entre 7 et 8 ans. On peut expliquer ces écarts en partie par le biais dû à la variance théorique, la queue de la loi Weibull Λ gamma étant trop épaisse. Par contre, pour les deux autres biens, l'écart entre les estimations est d'environ une année seulement. Les trois estimateurs de la durée de vie probable à l'état neuf (t^{*}, t^{**} et la médiane) sont indépendants. Ils permettent donc d'évaluer la fiabilité des estimations en analysant leur convergence. La durée de vie résiduelle médiane [équations (6), (14) et (28)] est ajustée aux observations dans le tableau 6. (Les prédictions du modèle de Weibull étant plus éloignées, elles ne sont pas présentées). Pour chacun des quatre biens, le modèle Weibull Λ gamma conduit à de meilleures prédictions. Les estimations des durées de vie résiduelles moyennes prédites par les deux modèles sont présentées dans le tableau 7 [équations (4), (13) et (27)]. A cause du regroupement des âges au-delà de 25 ans, ces prédictions n'ont pas été comparées à l'observation. On remarque pour la loi Weibull Λ gamma, la forme aplatie de la durée de vie résiduelle moyenne pour le réfrigérateur et la cuisinière. Pour le lave-linge et le téléviseur noir et blanc, sa forme est plus incurvée ([1]). Le tableau 8 montre les probabilités conditionnelles de renouvellement prédites par la loi Weibull Λ gamma [équation (17)]. Pour les quatre biens, la probabilité de renouvellement au bout d'une année augmente sensiblement pendant les dix premières années de la vie d'un appareil, puis diminue après un tassement pouvant s'étaler sur une dizaine d'années (cas du réfrigérateur et de la cuisinière). Le comportement des probabilités est analogue pour des renouvellements sur des horizons plus lointains. La valeur prédictive de ces estimations pourrait être mesurée en les comparant avec les renouvellements réalisés.

CONCLUSION

Les prédictions du renouvellement des biens durables sont développées à partir de plusieurs modèles et sont comparées. A notre connaissance, les résultats n'ont pas jusqu'à présent été présentés d'une façon aussi systématique. Les modèles sont fondés sur l'hypothèse de stabilité des durées de vie moyennes. Cette hypothèse n'a pas elle-même été testée. Par contre, ses implications ont été vérifiées au niveau global. Pour le modèle Weibull Λ gamma, l'ajustement semble compatible avec l'observation dans la plupart des cas. On remarque cependant une nette tendance (dans le cas du réfrigérateur et de la cuisinière) à surestimer la proportion d'appareils âgés, ce qui est probablement dû à une variance théorique trop élevée. A partir du modèle, plusieurs estimations ont été établies, en particulier des estimations de la durée de vie probable des appareils. Ces méthodes distinctes permettent d'analyser la convergence des résultats. Elles peuvent, d'autre part, servir de base de comparaison entre biens.

Le problème du renouvellement tend à revêtir une importance croissante. Des travaux complémentaires devraient permettre de mieux comprendre les sources de variation des espérances de vie entre appareils, en prenant en considération les caractéristiques des appareils et celles des utilisateurs. D'autre part, le modèle Weibull Λ gamma pourrait être utilisé dans d'autres contextes, tels que la prédiction de la défaillance d'une société, ou l'estimation de la durée de vie d'un patient après une greffe d'organe. De nombreuses hypothèses ont été développées. Elles mériteraient d'être plus largement testées. Il existe probablement d'autres théories, qui prédisent aussi le résultat d'un événement, que ce soit l'abandon d'un appareil, la création d'une société ou la greffe d'un organe. Il s'agit de les formaliser et de les comparer à celle présentée ici. En conclusion, cette étude devrait ouvrir la voie à d'utiles travaux de recherche.

([1]) Étant donné la forme aplatie de la durée de vie résiduelle moyenne dans le cas du réfrigérateur et de la cuisinière, la racine de l'équation (15) n'a pas été calculée.

BIBLIOGRAPHIE

ABRAMOWITZ (M.) et STEGUN (I. A.), *Handbook of Mathematical Functions*, New York, Dover Publications, 1972.

CHATFIELD (C.) et GOODHARDT (G. J.), A Consumer Purchasing Model With Erlang Inter-Purchase Times, *Journal of the American Statistical Association*, 68, décembre 1973, 828-835.

DUBEY (S. D.), A Compound Weibull Distribution, *Naval Research Logistics Quarterly*, 15, juin 1968, 179-188.

FRANK (R. E.), MASSY (W. F.) et WIND (Y.), *Market Segmentation*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1972.

HERNITER (J.), A Probabilistic Market Model of Purchase Timing and Brand Selection, *Management Science*, 18, décembre 1971, 102-113.

JEULAND (A. P.), BASS (F. M.) et WRIGHT (G. P.), A Multibrand Stochastic Model Compounding Heterogeneous Erlang Timing and Multinomial Choice Processes, *Operations Research*, 28, mars-avril 1980, 255-277.

JOHNSON (N. L.) et KOTZ (S.), *Continuous Univariate Distributions*, 1, New York, Wiley, 1970.

MORRISON (D. G.) et SCHMITTLEIN (D. C.), Jobs, Strikes and Wars : Probability Models for Duration, *Organizational Behavior and Human Performance*, 25, avril 1980, 224-251.

VERGER (D.), Les disparités d'équipement des ménages en biens durables, *Archives et Documents*, n° 57, Institut National de la Statistique et des Études Économiques, Paris, octobre, 1982 *a*, 238 pages.

VERGER (D.), Note sur la durabilité des principaux biens d'équipement, n° MODV-10/453, Département « Population et Ménages », Institut National de la Statistique et des Études Économiques, Paris, 1982 *b*, 41 pages.

ANNEXE A

Moments de la loi Weibull $\wedge$ gamma et de la loi Erlang-2 $\wedge$ gamma

1. Loi Weibull $\wedge$ gamma

Le transformé de Mellin est donné par :

$$E(t^{p-1}) = \int_0^\infty t^{p-1}\, r\,\sigma\beta\, t^{\beta-1}(1+\sigma t^\beta)^{-(r+1)}\,dt.$$

Posons $\sigma t^\beta = z$. D'où $\beta\sigma t^{\beta-1}\,dt = dz$ et $dt = \beta^{-1}\sigma^{-1/\beta} z^{1/\beta - 1}\,dz$.
Il en résulte que :

$$E(t^{p-1}) = \int_0^\infty r\,\sigma^{-1/\beta(p-1)}\, z^{(p/\beta)-(1/\beta)}(1+z)^{-(r+1)}\,dz$$

$$= r\,\sigma^{-(1/\beta)(p-1)}\, B\left(\frac{1}{\beta}(p-1)+1,\ r-\frac{1}{\beta}(p-1)\right).$$

D'où, la moyenne est :

$$\text{(A.1)}\quad E(t) = r\,\sigma^{-(1/\beta)}\, B\left(\frac{1}{\beta}+1,\ r-\frac{1}{\beta}\right) = \frac{1}{\beta}\sigma^{-(1/\beta)}\, B\left(\frac{1}{\beta},\ r-\frac{1}{\beta}\right), \qquad r > \frac{1}{\beta}$$

et la variance est :

$$(A.2)\quad V(t)=\frac{1}{\beta}\sigma^{-(2/\beta)}\left[2B\left(\frac{2}{\beta},\, r-\frac{2}{\beta}\right)-\frac{1}{\beta}B^2\left(\frac{1}{\beta},\, r-\frac{1}{\beta}\right)\right],\qquad r>\frac{2}{\beta}.$$

2. Loi Erlang-2 Λ gamma

Le transformé de Mellin est donné par :

$$E(t^{p-1})=\int_0^\infty t^{p-1}(r)_2\,\sigma^2\,t\,(1+\sigma t)^{-(r+2)}\,dt$$

$$=(r)_2\,\sigma^2\frac{B(p+1,\, r+1-p)}{\sigma^{p+1}}=\sigma^{-p+1}p\,(r-p)\,B(p,\, r-p).$$

La moyenne et la variance sont respectivement :

$$(A.3)\qquad E(t)=\frac{2}{\sigma(r-1)},\qquad r>1,$$

$$(A.4)\qquad V(t)=\frac{1}{\sigma^2(r-1)}\left[\frac{6}{r-2}-\frac{4}{r-1}\right],\qquad r>2.$$

ANNEXE B

Densité *a priori* de la moyenne de la loi de Weibull : ses moments

La moyenne de la loi de Weibull est :

$$(B.1)\qquad E(t\,|\,\lambda)=\frac{1}{\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}\right)\lambda^{-(1/\beta)}.$$

Donc, la moyenne de (B. 1) sur l'ensemble des appareils est :

$$E_\lambda[E(t\,|\,\lambda)]=E(t)=\frac{1}{\beta}\sigma^{-(1/\beta)}B\left(\frac{1}{\beta},\, r-\frac{1}{\beta}\right),\qquad r>\frac{1}{\beta},$$

donnée par (A . 1). Comme $V(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2$, il en résulte que :

$$(B.2)\quad V_\lambda[E(t\,|\,\lambda)]=\frac{1}{\beta^2}\sigma^{-(2/\beta)}\Gamma^2\left(\frac{1}{\beta}\right)\left[\frac{\Gamma(r-2/\beta)}{\Gamma(r)}-\frac{\Gamma^2(r-1/\beta)}{\Gamma^2(r)}\right],\qquad r>\frac{2}{\beta}.$$

D'où le coefficient de dispersion est égal à :

$$CD=\frac{V_\lambda[E(t\,|\,\lambda)]}{E(t)}=\frac{1}{\beta}\sigma^{-(1/\beta)}\left[B\left(\frac{1}{\beta},\, r-\frac{2}{\beta}\right)-B\left(\frac{1}{\beta},\, r-\frac{1}{\beta}\right)\right].$$

TABLEAU 1

Durée de vie résiduelle médiane pour les appareils d'âge t : modèle Erlang-2

t	Moyenne =20	Moyenne =10	Moyenne =20/3	Moyenne =5	Moyenne =4
0	16,8	8,4	5,6	4,2	3,4
1	15,9	7,5	4,8	3,4	2,7
2	15,1	6,9	4,3	3,0	2,3
3	14,4	6,4	3,9	2,7	2,1
4	13,8	6,0	3,7	2,6	1,9
5	13,3	5,7	3,5	2,4	1,9
10	11,5	4,9	3,0	2,1	1,6
15	10,4	4,5	2,8	2,0	1,6
20	9,7	4,3	2,7	1,9	1,5

TABLEAU 2

Répartition des appareils ménagers au moment de l'abandon entre les différents états

Biens durables	État au moment de l'abandon ([a])			Total ([b])	Nombre total d'appareils abandonnés ([c]) (milliers)
	En panne ou sinistré	En état de marche défectueuse	En état de marche acceptable		
Réfrigérateur	34,0	19,5	46,2	100,00	1 504
Cuisinière	22,4	31,2	45,9	100,00	1 493
Lave-linge	64,1	21,5	14,0	100,00	1 768
Téléviseur noir et blanc	48,9	23,9	26,9	100,00	2 722
Téléviseur couleur	39,5	22,6	37,3	100,00	177
Lave-vaisselle	55,3	18,2	26,5	100,00	132
Réfrigérateur congélateur ...	38,5	10,8	50,8	100,00	130
Congélateur	46,2	14,5	39,3	100,00	117
Tous produits confondus ...	44,4	23,5	32,1	100,00	8 015

([a]) En proportions.

([b]) A cause d'erreurs d'arrondis, certains totaux ne sont pas égaux à 100.

([c]) Ramené à la population totale.

TABLEAU 3

Indice d'hétérogénéité et estimations de la durée de vie probable

Biens durables	$r^{-1/2}$		t^* (années) ([a])	t^{**} (années) ([b])
	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Weibull Λ gamma	Weibull Λ gamma
Réfrigérateur	0,863	0,081 6	22,1	19,1
Cuisinière	0,718	0,081 6	21,6	19,8
Lave-linge	1,423	0,081 7	11,7	9,6
Téléviseur noir et blanc	1,197	0,081 7	12,6	10,4

([a]) Cette valeur t^* maximise les chances d'abandon. Le modèle Erlang-2 Λ gamma n'ayant pas conduit à des estimations plausibles, ces estimations n'apparaissent pas dans le tableau.

([b]) Cette valeur t^{**} minimise la durée de vie résiduelle médiane.

TABLEAU 4

Paramètres estimés par la méthode des moindres carrés non linéaires

Biens durables	Weibull			Weibull Λ gamma				Erlang-2 Λ gamma		
	λ (10^{-2})	β	E (a)	r	σ (10^{-4})	β	E (b) (10^{-2})	r	σ (10^{-4})	E (b) (10^{-2})
Réfrigérateur	0,416 9	1,820 7	2,213 5	1,341 4	3,784 4	2,719 9	1,257 3	150,015 3	7,182 7	8,060 1
Cuisinière	0,413 1	1,988 5	3,287 3	1,938 0	1,815 7	3,033 6	1,682 8	150,017 9	9,231 4	18,832 9
Lave-linge	0,242 1	2,144 4	1,420 6	0,494 1	0,761 28	4,349 8	1,038 7	149,870 7	9,432 7	11,712 65
Téléviseur noir et blanc	0,583 2	1,899 0	0,997 95	0,697 9	4,000 2	3,443 9	1,640 4	149,840 1	10,000 5	8,586 1
Réfrigérateur (c)	0,666 3	1,910 0	3,053 6	6,229 2	1,947 1	2,587 5	1,663 6	149,805 6	10,358 2	19,531 0
Cuisinière (c)	0,515 4	1,938 0	3,182 8	4,712 6	2,604 8	2,535 4	1,250 3	149,957 6	9,645 2	16,178 7
Lave-linge (c)	0,479 5	2,179 5	1,393 6	1,572 0	1,901 6	3,524 4	1,351 8	149,443 6	12,612 4	20,394 3
Téléviseur noir et blanc (c)	0,310 5	2,376 1	2,074 8	1,649 4	0,863 9	3,798 0	2,477 4	149,437 0	12,717 1	31,620 6

(a) Minimum de la fonction $E=\sum_{i=1}^{26}[\ln\lambda+\beta\ln(i-0{,}5)-\ln O(i-0{,}5)]^2$, où $O(.)$ est la distribution cumulée observée.

(b) Minimum de la fonction $E=\sum_{i=1}^{26}[H(i-0{,}5)-O(i-0{,}5)]^2$, où $H(.)$ est la distribution cumulée théorique.

(c) Paramètres estimés sur les données brutes.

TABL

Distribution des âges des appa

Age t (années)	Réfrigérateur				Cuisinière			
	Ob-servé	Weibull	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Ob-servé	Weibull	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma
0 - 0,5	0,3	0,12	0,007 7	0,14	0,3	0,104	0,004 3	0,23
0,5- 1,5	0,4	0,75	0,15	1,04	0,8	0,817	0,116	1,66
1,5- 2,5	1,0	1,32	0,46	1,87	0,6	1,60	0,444	2,90
2,5- 3,5	1,2	1,81	0,90	2,52	0,9	2,34	0,990	3,79
3,5- 4,5	2,0	2,25	1,44	3,02	2,5	3,03	1,73	4,40
4,5- 5,5	2,6	2,63	2,05	3,38	3,7	3,64	2,63	4,79
5,5- 6,5	2,2	2,96	2,69	3,64	3,1	4,17	3,62	5,00
6,5- 7,5	1,8	3,24	3,30	3,81	3,4	4,61	4,62	5,07
7,5- 8,5	3,2	3,48	3,88	3,91	5,0	4,95	5,53	5,04
8,5- 9,5	1,6	3,67	4,36	3,95	3,0	5,20	6,28	4,94
9,5-10,5	11,4	3,81	4,74	3,94	13,1	5,35	6,80	4,77
10,5-11,5	1,3	3,91	4,99	3,89	2,8	5,40	7,06	4,57
11,5-12,5	6,0	3,97	5,11	3,80	7,5	5,37	7,05	4,34
12,5-13,5	2,6	3,99	5,12	3,70	3,5	5,26	6,8	4,09
13,5-14,5	3,2	3,98	5,03	3,57	3,7	5,08	6,37	3,84
14,5-15,5	10,3	3,93	4,85	3,44	14,9	4,85	5,82	3,58
15,5-16,5	1,9	3,86	4,61	3,29	3,1	4,57	5,19	3,33
16,5-17,5	2,2	3,76	4,32	3,14	2,2	4,26	4,55	3,08
17,5-18,5	4,7	3,64	4,01	2,98	3,5	3,92	3,93	2,84
18,5-19,5	1,8	3,50	3,69	2,83	1,9	3,57	3,35	2,61
19,5-20,5	11,0	3,35	3,37	2,67	10,9	3,22	2,83	2,39
20,5-21,5	1,6	3,18	3,06	2,52	0,8	2,87	2,38	2,19
21,5-22,5	2,7	3.01	2,76	2,37	1,9	2,53	1,98	2,00
22,5-23,5	1,1	2,83	2,48	2,23	0,5	2,21	1,65	1,82
23,5-24,5	1,6	2,65	2,23	2,09	0,3	1,92	1,36	1,66
24,5-25,5	5,7	2,47	2,00	1,95	2,3	1,65	1,13	1,50
$25,5^{+}$	14,5	21,95	18,40	24,29	3,4	7,52	5,77	13,57
	100,0	100,00	100,00	100,00	100,0	100,00	100,000 0	100,00
Moyenne		18,031	18,354	18,686		14,011	14,017	14,539
Écart type		10,259	12,666	13,347		7,362	6,874	10,384
Erreur carrée moyenne		10,031	8,359	12,344		10,930	10,110	16,314
Nombre d'appareils abandonnés (milliers)			1 504				1 493	

EAU 5
reils à l'abandon (pourcentages)

Age t (années)	Lave-linge				Téléviseur noir et blanc			
	Ob-servé	Weibull	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Ob-servé	Weibull	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma
0 - 0,5	0,1	0,055	0,000 18	0,24	0,2	0,16	0,002 6	0,27
0,5- 1,5	0,5	0,521	0,021 75	1,72	1,0	1,10	0,110	1,92
1,5- 2,5	1,0	1,14	0,180	3,01	1,8	2,02	0,54	3,32
2,5- 3,5	1,5	1,78	0,66	3,92	2,6	2,83	1,39	4,29
3,5- 4,5	1,9	2,42	1,65	4,53	2,0	3,55	2,64	4,92
4,5- 5,5	4,2	3,03	3,20	4,92	4,2	4,15	4,16	5,29
5,5- 6,5	3,4	3,60	5,13	5,12	3,8	4,65	5,68	5,46
6,5- 7,5	4,6	4,11	6,97	5,18	4,6	5,03	6,90	5,48
7,5- 8,5	6,8	4,55	8,20	5,14	5,8	5,30	7,62	5,39
8,5- 9,5	4,6	4,90	8,60	5,01	3,6	5,46	7,79	5,22
9,5-10,5	17,0	5,16	8,27	4,83	17,3	5,52	7,50	4,99
10,5-11,5	4,1	5,33	7,49	4,61	4,6	5,49	6,91	4,72
11,5-12,5	8,7	5,41	6,54	4,37	8,9	5,38	6,17	4,43
12,5-13,5	2,6	5,40	5,60	4,11	3,2	5,19	5,39	4,13
13,5-14,5	2,9	5,31	4,74	3,84	3,3	4,95	4,66	3,83
14,5-15,5	8,2	5,14	4,00	3,57	8,4	4,66	4,00	3,54
15,5-16,5	3,9	4,91	3,37	3,31	1,7	4,33	3,42	3,25
16,5-17,5	2,9	4,63	2,86	3,05	2,3	3,99	2,92	2,97
17,5-18,5	2,3	4,31	2,43	2,81	1,5	3,63	2,50	2,71
18,5-19,5	1,0	3,96	2,08	2,58	0,6	3,27	2,14	2,47
19,5-20,5	3,4	3,60	1,79	2,36	3,9	2,92	1,85	2,24
20,5-21,5	0,5	3,23	1,54	2,15	0,5	2,58	1,59	2,02
21,5-22,5	0,6	2,86	1,34	1,96	–	2,26	1,38	1,83
22,5-23,5	1,2	2,51	1,17	1,78	0,3	1,96	1,21	1,65
23,5-24,5	0,9	2,17	1,03	1,61	–	1,69	1,06	1,48
24,5-25,5	1,8	1,86	0,91	1,46	2,6	1,44	0,93	1,33
$25,5^+$	9,3	8,11	10,23	12,83	11,2	6,49	9,55	10,85
	100,0	100,000	100,000 00	100,00	100,0	100,00	100,000 00	100,00
Moyenne		14,696	15,369	14,243		13,323	14,578	13,437
Écart type		7,216	29,495	10,173		7,297	17,521	9,597
Erreur carrée moyenne		8,341	6,116	9,191		9,259	7,319	9,243
Nombre d'appareils abandonnés (milliers)			1 768				2 722	

TABL

Durée de vie résiduelle médiane

Age t (années)	Réfrigérateur			Cuisinière		
	Observé	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Observé	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma
0-0,5	15,4	15,7	15,6	13,4	13,0	12,1
0,5-1,5	14,9	15,2	15,1	13,0	12,5	11,7
1,5-2,5	13,9	14,2	14,3	12,1	11,5	10,9
2,5-3,5	13,0	13,3	13,6	11,2	10,5	10,2
3,5-4,5	12,2	12,4	13,0	10,3	9,6	9,7
4,5-5,5	11,7	11,5	12,4	9,6	8,7	9,2
5,5-6,5	11,3	10,7	12,0	9,0	8,0	8,9
6,5-7,5	10,8	10,4	11,6	8,1	7,2	8,5
7,5-8,5	10,1	9,4	11,2	7,3	6,5	8,3
8,5-9,5	9,5	8,9	10,9	6,4	6,0	8,0
9,5-10,5	8,6	8,4	10,7	5,5	5,5	7,8
10,5-11,5	9,2	8,0	10,4	5,2	5,1	7,7
11,5-12,5	8,3	7,7	10,2	4,3	4,8	7,5
12,5-13,5	7,5	7,4	10,0	4,7	4,5	7,4
13,5-14,5	6,6	7,2	9,8	4,3	4,3	7,2
14,5-15,5	5,8	7,0	9,7	3,8	4,1	7,1
15,5-16,5	6,5	6,9	9,5	4,4	4,0	7,0
16,5-17,5	5,8	6,8	9,4	3,6	3,9	6,9
17,5-18,5	5,1	6,7	9,3	2,7	3,9	6,9
18,5-19,5	6,0	6,7	9,2	1,9	3,8	6,8
19,5-20,5	5,2	6,7	9,1	1,8	3,8	6,7
20,5-21,5	–	–	–	4,6	3,8	6,7
Erreur carrée moyenne .		0,568	5,345		0,705	6,644

.EAU 6
pour les appareils d'âge *t* (années)

Age t (années)	Lave-linge			Téléviseur noir et blanc		
	Observé	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Observé	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma
0-0,5	11,5	11,4	11,9	11,2	11,3	11,2
0,5-1,5	11,0	10,9	11,4	10,7	10,8	10,8
1,5-2,5	10,1	9,9	10,6	9,8	9,8	10,0
2,5-3,5	9,1	9,0	10,0	9,0	8,9	9,3
3,5-4,5	8,2	8,0	9,4	8,1	8,0	8,8
4,5-5,5	7,3	7,1	9,0	7,3	7,2	8,4
5,5-6,5	6,6	6,4	8,6	6,5	6,5	8,0
6,5-7,5	5,8	5,8	8,3	5,7	6,0	7,7
7,5-8,5	5,1	5,3	8,1	5,0	5,6	7,5
8,5-9,5	5,3	5,1	7,8	4,8	5,4	7,3
9,5-10,5	5,0	5,0	7,6	4,4	5,2	7,1
10,5-11,5	5,2	5,1	7,5	4,8	5,2	6,9
11,5-12,5	4,7	5,2	7,3	4,3	5,2	6,8
12,5-13,5	5,9	5,4	7,2	5,6	5,3	6,7
13,5-14,5	4,7	5,6	7,1	6,1	5,5	6,6
14,5-15,5	4,7	5,9	7,0	5,5	5,7	6,5
15,5-16,5	5,9	6,2	6,9	9,6	5,9	6,4
16,5-17,5	7,1	6,5	6,8	8,9	6,1	6,3
17,5-18,5	7,4	6,9	7,0	–	–	–
18,5-19,5	7,0	7,2	6,6	–	–	–
19,5-20,5	–	–	–	–	–	–
20,5-21,5	–	–	–	–	–	–
Erreur carrée moyenne .		0,188	3,208		1,361	3,222

TABLEAU 7

Durée de vie résiduelle moyenne pour les appareils d'âge *t* (années)

Age *t* (années)	Réfrigérateur		Cuisinière		Lave-linge		Téléviseur noir et blanc	
	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma	Weibull Λ gamma	Erlang-2 Λ gamma
0	18,4	18,7	14,0	14,5	15,4	14,2	14,6	13,4
5	14,0	20,8	9,5	17,2	10,8	16,9	10,3	16,3
10	11,5	26,4	6,8	24,3	10,4	24,2	9,7	24,0
15	10,7	35,9	5,8	37,5	13,5	37,8	11,8	38,9
20	11,0	50,8	5,8	60,8	17,6	62,1	14,8	66,3

TABLEAU 8

Probabilité conditionnelle de renouvellement des appareils d'un âge donné *t* au bout de *x* années : modèle Weibull Λ gamma

Age de l'appareil actuellement disponible t (années)	Réfrigérateur					Cuisinière				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	0,000507 ([a])	0,00333	0,00999	0,0216	0,0390	0,000352	0,00288	0,00978	0,0232	0,0448
5	0,0247	0,0559	0,0934	0,136	0,184	0,0327	0,0758	0,129	0,191	0,260
10	0,0622	0,127	0,192	0,257	0,320	0,0985	0,199	0,297	0,391	0,477
15	0,0888	0,173	0,251	0,323	0,389	0,149	0,281	0,396	0,494	0,577
20	0,0986	0,188	0,268	0,340	0,405	0,166	0,305	0,421	0,517	0,596
25	0,0975	0,185	0,263	0,332	0,394	0,163	0,297	0,409	0,501	0,578
30	0,0918	0,174	0,247	0,313	0,373	0,152	0,278	0,384	0,472	0,547

Age de l'appareil actuellement disponible t (années)	Lave-linge					Téléviseur noir et blanc				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
0	0,0000376	0,000766	0,00444	0,0153	0,0389	0,000279	0,00303	0,0121	0,0318	0,0656
5	0,0431	0,107	0,186	0,275	0,363	0,0529	0,121	0,199	0,282	0,365
10	0,129	0,244	0,343	0,428	0,499	0,122	0,232	0,329	0,414	0,487
15	0,120	0,221	0,307	0,380	0,443	0,121	0,225	0,314	0,390	0,455
20	0,0972	0,181	0,255	0,319	0,376	0,103	0,193	0,270	0,338	0,398
25	0,0801	0,151	0,215	0,271	0,322	0,0870	0,164	0,232	0,293	0,321
30	0,0677	0,129	0,185	0,235	0,281	0,0744	0,141	0,202	0,256	0,306

([a]) Lire « la probabilité de renouveler un réfrigérateur au bout d'un an ($x=1$) lorsque l'appareil actuellement disponible est neuf (âge $=0$ an) est 0,000 507 ».